

翼型气动弹性系统的三种状态方程的等价性*

黄熙文, 陈衍茂, 李文龙, 刘广

中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006

摘要: 作用于翼型气动弹性系统上的非定常Theodorsen空气动力中含有卷积积分, 此积分算子的存在使得直接模拟气动弹性系统的响应是一项困难的工作。目前, 已有三种不同的方式可以处理方程中的积分算子, 使得化简后的方程仅含微分算子, 但三种模型之间的等价关系仍然研究较少。文章将从数学上证明这三种化简后的模型是等价的, 且分别采用龙格-库塔法和精细积分法对其进行验证。数值结果表明, 三种模型无论是瞬态还是稳态响应, 都是完全相同的。

关键词: 翼型; 气动弹性系统; 状态空间模型; 等效性

中图分类号: V21 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2022)03-0171-10

Equivalence of three state space models for airfoil aeroelastic systems

HUANG Xiwen, CHEN Yanmao, LI Wenlong, LIU Guang

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China

Abstract: It is difficult to simulate the response of aeroelastic system directly because of the convolution integral in the unsteady Theodorsen aerodynamic force. To the best of our knowledge, there are three different ways to deal with the integral operator, so that the simplified equation only contains the differential operators. Despite huge applications of these models, the equivalence relationship among them is still less studied. In this paper, we will prove mathematically proved that the three simplified models are equivalent, and verify them by Runge-Kutta method and precise integration method, respectively. Numerical results show that these models exhibit exactly the same solutions for both transient and steady responses.

Key words: airfoil; aeroelastic system; state space model; equivalence

近几十年来, 已有大量关于翼型气动弹性响应预测和分析的研究^[1-3]。作用在机翼上的亚音速来流, 通常采用Theodorsen理论来进行气动力建模^[4-5]。在该理论中, 升力和俯仰力矩系数均由卷积积分建立^[6]。由于系统方程同时包含微分和积分算子, 因此使用数值方法直接求解是相当困难的^[6]。并且从计算的角度来看, 求解积分方程比解微分方程困难得多。

众所周知, 通过Newmark- β 法等时程积分方法^[7-8], 可以方便地模拟仅包含微分算子的状态空间模型。但倘若同时存在积分项, 此类振动方程则很难化简为状态空间方程。对于亚音速来流作用下的气动弹性系统, Lee等^[9]通过引入4个辅助变量, 将同时包含卷积积分的系统, 化简为由8个常微分方程表示的状态空间模型。Trickey^[10]则提出了另一种建模方法, 通过使用拉普拉斯变换的方式成功处理了卷积, 该方法的状态空间模型仅包含6个常微分方程。此外, Collier和Chamara^[11]也提出了一种仅用6个常微分

* 收稿日期: 2020-12-26 录用日期: 2021-03-11 网络首发日期: 2021-07-12

基金项目: 国家自然科学基金(11272361, 11972380)

作者简介: 黄熙文(1994年生), 男; 研究方向: 非线性动力学; E-mail: huangxw63@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘广(1992年生), 男; 研究方向: 非线性振动、参数识别等; E-mail: liug36@mail.sysu.edu.cn

方程表示气动弹性系统的方法。上述三种状态空间方程在过去数十年中都得到了广泛的应用。Lee 等建立的模型, 被广泛应用于具有结构非线性的气动弹性系统中, 包含立方、间隙以及滞回非线性等模型中^[12-15]。Trickey 等的模型, 通常应用于带有控制面的气动弹性系统的颤振抑制问题中^[16-18]。Coller 等提出的模型多用于研究极限环颤振和双颤振的性质^[19-20]。

上述三种气动弹性系统状态空间模型之间是否等价, 对于气动弹性系统的研究至关重要。但是, 目前还没有解析研究或数值分析证明它们之间是完全等价的。在本文中, 我们将分别推导翼型气动弹性系统的三种状态空间模型, 并从数学上证明三种化简模型是等价的, 再通过数值结果进一步验证三者之间的关系。

1 翼型气动弹性系统的状态空间模型

二元机翼模型如图 1 所示, 其在俯仰方向和沉浮方向上振动。定义弹性轴的俯仰角度为 α (抬头为正), 沉浮位移为 h (向下为正)。弹性轴位于距机翼中点的 $a_h b$ 处, 质心位于距弹性轴 $x_\alpha b$ 处。

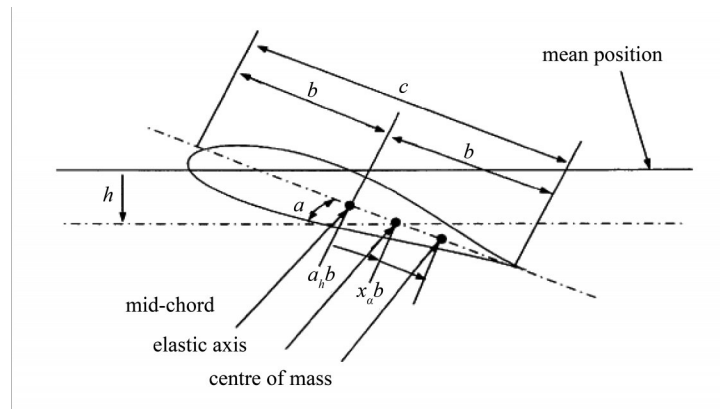


图 1 俯仰和沉浮方向振动的二元机翼模型^[6]

Fig. 1 Sketch of an airfoil oscillating in pitch (α) direction, and in plunge (h) direction^[6]

考虑亚音速来流, 机翼运动的耦合方程可表示为^[6]

$$\ddot{\xi} + x_\alpha \ddot{\alpha} + 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{U} \dot{\xi} + \left(\frac{\bar{\omega}}{U}\right)^2 G(\xi) = -\frac{1}{\mu} C_L(t), \quad \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} \ddot{\xi} + \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \frac{1}{U} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{U}\right)^2 M(\alpha) = \frac{2}{\mu r_\alpha^2} C_M(t), \quad (1)$$

其中 $\xi = h/b$ 是无量纲位移, 状态变量上方的点表示对无量纲时间 t 的微分。其中 $t = Vt_1/b$, t_1 是真实的时间; V 为来流速度, $U = V/(b\omega_\alpha)$ 是无量纲流速。 $\bar{\omega} = \omega_\xi/\omega_\alpha$, 其中 ω_ξ 和 ω_α 分别表示沉浮和俯仰方向的固有频率。函数 $G(\xi)$ 和 $M(\alpha)$ 为沉浮和俯仰方向的线性或非线性的刚度。 ζ_ξ 和 ζ_α 对应于沉浮和俯仰方向的阻尼比, r_α 是绕弹性轴的回旋半径, m 是单位长度的机翼质量, μ 是机翼和空气的质量比。

根据 Theodorsen 空气动力学模型^[1], 在不可压非定常流作用下, 升力 $C_L(t)$ 和力矩 $C_M(t)$ 系数为

$$\begin{aligned} C_L(t) &= \left(\ddot{\xi} - a_h \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}\right) + 2\left\{\alpha(0) + \dot{\xi}(0) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\dot{\alpha}(0)\right\}\phi(t) \\ &\quad + 2\int_0^t \phi(t-\sigma)\left\{\dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{\xi}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\ddot{\alpha}(\sigma)\right\}d\sigma, \\ C_M(t) &= \left(\frac{1}{2} + a_h\right)\left\{\alpha(0) + \dot{\xi}(0) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\dot{\alpha}(0)\right\}\phi(t) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + a_h\right)\int_0^t \phi(t-\sigma)\left\{\dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{\xi}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\ddot{\alpha}(\sigma)\right\}d\sigma + \frac{a_h}{2}\left(\ddot{\xi} - a_h \ddot{\alpha}\right) - \left(\frac{1}{2} - a_h\right)\frac{\pi}{2}\dot{\alpha} - \frac{\pi}{16}\ddot{\alpha}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 Wagner 函数 $\varphi(t) = 1 - \psi_1 e^{-\varepsilon_1 t} - \psi_2 e^{-\varepsilon_2 t}$, 表达式中的常数 $\psi_1 = 0.165$, $\psi_2 = 0.335$, $\varepsilon_1 = 0.0455$ 和 $\varepsilon_2 = 0.3$. 由于积分项 $\varphi(t - \sigma) \left\{ \dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{\xi}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right\} d\sigma$ 的存在, 气动弹性方程 (1) 本质上是一组微分-积分方程。

1.1 模型1(Lee 等的模型)

为消除积分算子, Lee 等^[9] 引入如下形式的4个辅助变量

$$w_1 = \int_0^t e^{-\varepsilon_1(t-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma, \quad w_2 = \int_0^t e^{-\varepsilon_2(t-\sigma)} \alpha(\sigma) d\sigma, \quad w_3 = \int_0^t e^{-\varepsilon_1(t-\sigma)} \dot{\xi}(\sigma) d\sigma, \quad w_4 = \int_0^t e^{-\varepsilon_2(t-\sigma)} \dot{\xi}(\sigma) d\sigma.$$

引入新的状态变量, 即令 $\mathbf{X}(t) = [\xi \quad \alpha \quad \dot{\xi} \quad \dot{\alpha}]^T$, $\mathbf{W}(t) = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4]^T$, 则可得到状态空间模型方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{W}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{W} \end{pmatrix} + \mathbf{V}_1 e^{-\varepsilon_1 t} + \mathbf{V}_2 e^{-\varepsilon_2 t} + F(\mathbf{X}), \quad (3)$$

其中 $\mathbf{D}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix}$, $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} c_4 + c_{10} & c_5 \\ d_4 & d_5 + d_{10} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_2 & c_3 \\ d_2 & d_3 \end{pmatrix}$, $F(\mathbf{X}) = r'_\xi(G(\xi) - \xi) + r'_\alpha(G(\alpha) - \alpha)$. 其中参数 c_i , d_i ($i = 1, \dots, 10$) 和其他矩阵的表达式如附录所示。

1.2 模型2(Trickey 等的模型)

根据式 (2), 升力中的积分可展开为

$$\begin{aligned} I(t) &= \left\{ \alpha(0) + \dot{\xi}(0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(0) \right\} \phi(t) + \int_0^t \phi(t - \sigma) \left\{ \dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{\xi}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right\} d\sigma \\ &= \left\{ \alpha(t) + \dot{\xi}(t) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(t) \right\} \phi(0) - \int_0^t \frac{\partial \phi(t - \sigma)}{\partial \sigma} \left\{ \alpha(\sigma) + \dot{\xi}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(\sigma) \right\} d\sigma, \end{aligned} \quad (4)$$

并可进一步简化为

$$I(t) = w_{3/4}(t)(1 - \varphi_1 - \varphi_2) + L^{-1}W_{3/4}(s)[s\Psi(s) - \varphi(0)], \quad (5)$$

其中 $W_{3/4}(s) = L[w_{3/4}(t)]$, $w_{3/4}(t) = \alpha(t) + \dot{\xi}(t) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(t)$ 表示机翼在 3/4 弦长处的位移, 且 $\Psi(s) = L[\dot{\varphi}(t)]$; 此处, $L[\cdot]$ 表示拉普拉斯变换。根据卷积理论, 可得

$$\begin{aligned} I(t) &= (1 - \varphi_1 - \varphi_2) w_{3/4}(t) + L^{-1} \left[W_{3/4}(s) \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varphi_1 + \varphi_2) + (\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) s}{s^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) s + \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right] \\ &= (1 - \varphi_1 - \varphi_2) w_{3/4}(t) + L^{-1} \left\{ Y(s) \left[\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varphi_1 + \varphi_2) + (\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) s \right] \right\} \\ &= (1 - \varphi_1 - \varphi_2) w_{3/4}(t) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varphi_1 + \varphi_2) L^{-1}[Y(s)] + (\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) L^{-1}[sY(s)] \\ &= (1 - \varphi_1 - \varphi_2) w_{3/4}(t) + \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varphi_1 + \varphi_2) y(t) + (\varepsilon_1 \varphi_1 + \varepsilon_2 \varphi_2) \dot{y}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $Y(s) = W_{3/4}(s) / (s^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)s + \varepsilon_1 \varepsilon_2)$, $w_{3/4}(t) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 y(t) + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \dot{y}(t) + \ddot{y}(t)$. 将 $y(t)$ 和 $\dot{y}(t)$ 写成向量形式, 即 $\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2]^T$. 其中 $y_1 = y(t)$, $y_2 = \dot{y}(t)$, 则可得到气动弹性系统 (1) 的另一个状态空间模型

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + F(\mathbf{X}), \quad (7)$$

其中 $\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{K}} & -\mathbf{M}^{-1}\bar{\mathbf{C}} \end{pmatrix}$, \mathbf{M} 和 \mathbf{C} 与式 (3) 中的定义相同; 且 $\bar{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} c_{10} & \bar{c}_5 \\ 0 & d_{10} + \bar{d}_5 \end{pmatrix}$, 式中 \bar{c}_5 , \bar{d}_5 和其他矩阵如附录所示。

1.3 模型3(Coller 和 Chamara 的模型)

根据 Coller 和 Chamara 的研究^[11], 升力中的积分可以表示为

$$\begin{aligned}
I(t) &= w_{3/4}(t)(1 - \varphi_1 - \varphi_2) - \int_0^t \frac{\partial \phi(t - \sigma)}{\partial \sigma} w_{3/4}(\sigma) d\sigma \\
&= w_{3/4}(t)(1 - \varphi_1 - \varphi_2) + \varepsilon_1 \varphi_1 \int_0^t e^{-\varepsilon_1(t - \sigma)} w_{3/4}(\sigma) d\sigma + \varepsilon_2 \varphi_2 \int_0^t e^{-\varepsilon_2(t - \sigma)} w_{3/4}(\sigma) d\sigma \\
&= w_{3/4}(t)(1 - \varphi_1 - \varphi_2) + z_1(t) + z_2(t),
\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\dot{z}_i(t) = -\varepsilon_i z_i + \varepsilon_i \phi_i w_{3/4}(t)$ 。则第三种状态空间模型可以表示为

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Z \end{pmatrix} + F(X), \tag{9}$$

其中 $B_{11} = A_{11}$ ，其他矩阵均在附录中列出。值得注意的是，模型 2 和 3 中的非线性项与模型 1 中的非线性项完全相同。

在数学上，模型 1 和 3 都是基于卷积项 $\int_0^t e^{-\varepsilon_i(t - \sigma)} p(\sigma) d\sigma$ 进行化简的。不同的是，模型 3 中是将 $w_{3/4}(t)$ 视为一个整体，模型 1 中则看作关于 $\alpha(t)$ ， $\dot{\xi}(t)$ 和 $(0.5 - a_h)\dot{\alpha}(t)$ 的三项。在这些化简过程中，系统 (3) 还出现了一些非自治项，例如 $V_1 e^{-\varepsilon_1 t}$ 和 $V_2 e^{-\varepsilon_2 t}$ 。

还值得注意的是，研究人员^[21-22]提出了一种处理积分的近似办法。他们同样将 $w_{3/4}(t)$ 视为一个整体，不同的是在分部积分之前引入了两个不同的变量，即

$$z_i = w_{3/4}(0) \psi_i e^{-\varepsilon_i t} + \int_0^t \psi_i e^{-\varepsilon_i(t - \sigma)} w_{3/4}(\sigma) d\sigma. \tag{10}$$

通过简单的计算，可以推导出如下常微分方程组

$$\dot{z}_i(t) = -\varepsilon_i z_i + \psi_i \dot{w}_{3/4}(t). \tag{11}$$

从本质上讲，这种方法与 Coller 和 Chamara 提出的方法是相同的。

2 等价性证明

式 (9) 中的最后两个方程可表示为

$$\dot{Z} - B_{22}Z = B_{21}X. \tag{12}$$

由初始条件 $Z(0) = 0$ ，可得 $\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t e^{-\varepsilon_i(t - \sigma)} w_{3/4}(\sigma) d\sigma$ 。考虑到 $B_{22} = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ，可求得解

$$Z = \begin{pmatrix} \int_0^t B_{21}(1, :) X e^{\varepsilon_1(\sigma - t)} d\sigma \\ \int_0^t B_{21}(2, :) X e^{\varepsilon_2(\sigma - t)} d\sigma \end{pmatrix}. \tag{13}$$

将式 (13) 代入到式 (9) 的前 4 个方程中可得

$$\dot{X} - B_{11}X = B_{12} \begin{pmatrix} \int_0^t B_{21}(1, :) X e^{\varepsilon_1(\sigma - t)} d\sigma \\ \int_0^t B_{21}(2, :) X e^{\varepsilon_2(\sigma - t)} d\sigma \end{pmatrix} + F(X), \tag{14}$$

其中 $F(X) = r'_\xi(G(\xi) - \xi) + r'_\alpha(G(\alpha) - \alpha)$ 表示带有 $r'_\xi = (0 \ 0 \ (c_{10} \ 0))^T (M^{-1})^T$ 和 $r'_\alpha = (0 \ 0 \ (0 \ d_{10})^T (M^{-1})^T$ 的非线性项。

通过引入变量 w_i 和对变量 $X(t) = [\xi \ \alpha \ \dot{\xi} \ \dot{\alpha}]^T$ 进行分析，可发现

$$\begin{aligned}
\int_0^t X_3 e^{\varepsilon_1(\sigma - t)} d\sigma &= -\varepsilon_1 w_3 + X_1 - X_1(0) e^{-\varepsilon_1 t}, & \int_0^t X_4 e^{\varepsilon_1(\sigma - t)} d\sigma &= -\varepsilon_1 w_1 + X_2 - X_2(0) e^{-\varepsilon_1 t}, \\
\int_0^t X_3 e^{\varepsilon_2(\sigma - t)} d\sigma &= -\varepsilon_2 w_4 + X_1 - X_1(0) e^{-\varepsilon_2 t}, & \int_0^t X_4 e^{\varepsilon_2(\sigma - t)} d\sigma &= -\varepsilon_2 w_2 + X_2 - X_2(0) e^{-\varepsilon_2 t}.
\end{aligned}$$

将以上 4 个方程代入式 (14) 中可得

$$\dot{X} - B_{11}X = B_{12} H_w W + B_{12} H_X X + B_{12} J_1 e^{-\varepsilon_1 t} + B_{12} J_2 e^{-\varepsilon_2 t} + F(X), \tag{15}$$

其中

$$J_2 = (0 \quad -B_{21}(2,3)X_1(0) - B_{21}(2,4)X_2(0))^T, \quad H_X = \begin{pmatrix} B_{21}(1,3) & B_{21}(1,4) & 0 & 0 \\ B_{21}(2,3) & B_{21}(2,4) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_W = \begin{pmatrix} B_{21}(1,2) - \varepsilon_1 B_{21}(1,4) & 0 & B_{21}(1,1) - \varepsilon_1 B_{21}(1,3) & 0 \\ 0 & B_{21}(2,2) - \varepsilon_2 B_{21}(2,4) & 0 & B_{21}(2,1) - \varepsilon_2 B_{21}(2,3) \end{pmatrix},$$

$$J_1 = (-B_{21}(1,3)X_1(0) - B_{21}(1,4)X_2(0) \quad 0)^T.$$

另一方面, 系统 (3) 中的前4个方程可表示为

$$\dot{X} = D_{11}X + D_{12}W + V_1 e^{-\varepsilon_1 t} + V_2 e^{-\varepsilon_2 t} + F(X). \quad (16)$$

经过计算, 可以发现 $B_{11} + B_{12}H_X = D_{11}$, $D_{12} = B_{12}H_W$, $V_1 = B_{12}J_1$ 以及 $V_2 = B_{12}J_2$. 此外, 式 (16) 中的非线性项与式 (15) 中的完全一致。因此, 可以得出结论: 式 (15) 与式 (16) 完全相同, 系统 (9) 与系统 (3) 是等价的。

对于系统 (7), 将式 (7) 中最后两个方程写成为

$$\dot{Y} - A_{22}Y = A_{21}X. \quad (17)$$

引入 $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}$ 将 A_{22} 对角化, 即 $P^{-1}A_{22}P = B_{22}$. 对式 (17) 应用线性变换 $Y = PS$, 可得

$$\dot{S} - B_{22}S = P^{-1}A_{21}X. \quad (18)$$

类似方程 (12) 求解可得

$$S = \begin{pmatrix} \int_0^t Q(1, \cdot) X e^{\varepsilon_1(\sigma-t)} d\sigma \\ \int_0^t Q(2, \cdot) X e^{\varepsilon_2(\sigma-t)} d\sigma \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中 $Q = P^{-1}A_{21}$. 将式 (19) 代入 $Y = PS$ 中, 可将系统 (7) 的前4个方程写成为

$$\dot{X} - A_{11}X = A_{12}P \begin{pmatrix} \int_0^t Q(1, \cdot) X e^{\varepsilon_1(\sigma-t)} d\sigma \\ \int_0^t Q(2, \cdot) X e^{\varepsilon_2(\sigma-t)} d\sigma \end{pmatrix} + F(X). \quad (20)$$

显然 $Q = TB_{21}$, 其中 $T = \frac{1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^{-1} \varphi_1^{-1} & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2^{-1} \varphi_2^{-1} \end{pmatrix}$. 因此, 式 (20) 可以写为

$$\dot{X} - A_{11}X = A_{12}PT \begin{pmatrix} \int_0^t B_{21}(1, \cdot) X e^{\varepsilon_1(\sigma-t)} d\sigma \\ \int_0^t B_{21}(2, \cdot) X e^{\varepsilon_2(\sigma-t)} d\sigma \end{pmatrix} + F(X). \quad (21)$$

因此, 式 (21) 与 (14) 是等价的, 其中 $A_{12}PT = B_{12}$, 这说明本质上模型2与模型3是等价的。

3 数值验证

接下来, 我们将对上述三种模型进行数值验证。其中系统参数设置为 $\mu = 100$, $r_\alpha = 0.5$, $a_h = -0.5$, $\zeta_\alpha = \zeta_\xi = 0$, $\bar{\omega} = 0.25$, $x_\alpha = 0.25$ 。根据 Hopf 分岔理论, 可以获得系统的分岔点为 $U_f = 6.0385$ 。当无量纲来流速度 U 超过 U_f 时, 系统的平衡点 $X = 0$ 将失去稳定性, 即系统将产生极限环振荡^[6]。

基于状态空间模型, 可以通过如龙格-库塔法等数值方法, 求得系统 (3)、(7)、(9) 在任意给定初始条件下的数值解。为了便于对比, 使用下标 1、2 和 3 分别表示系统 (3)、(7) 和 (9) 的解。考虑线性系统, 即 $G(\xi) = \xi$, $M(\alpha) = \alpha$, 沉浮方向的位移可表示为 $\xi_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$)。当初始条件都设置为 $X(0) = [0.2 \quad 0.1 \quad 0 \quad 0]^T$ 时, 三种模型的解完全一致, 如图 2 所示。在接下来的所有讨论中, 初始条件都设为

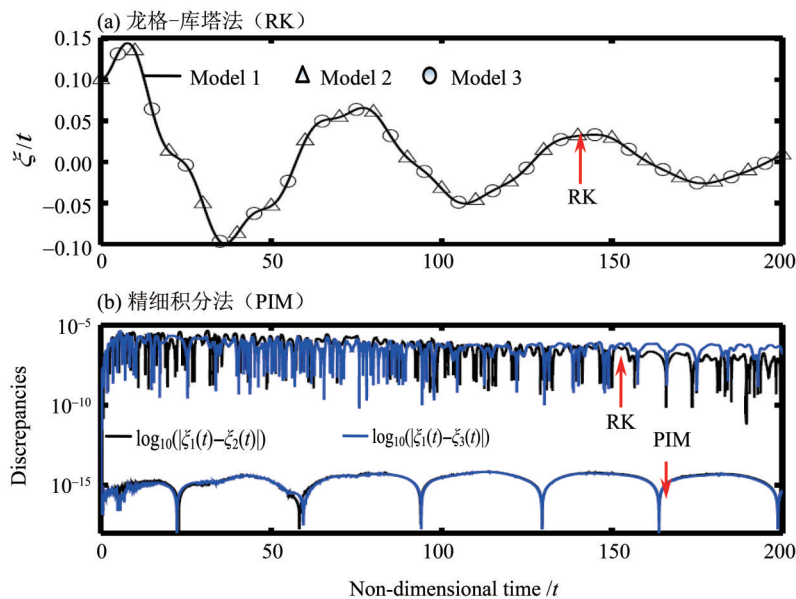


图2 龙格-库塔法(RK)和精细积分法(PIM)计算的沉浮方向位移和对应的残差($U/U_f=0.5$)

Fig. 2 Plunge displacements obtained by Runge-Kutta method (RK) and precise integration method (PIM), where $U/U_f=0.5$

上述值。此外,图2还给出了三个位移之间的残差。可以看到,RK法获得的结果的残差数量级在 10^{-6} 到 10^{-5} 之间,远远小于位移解的数量级 10^{-1} 。为了进一步验证三种模型之间的等价性,可采用精细积分法^[23-24](PIM)来求解原系统。可以看到,精细积分法的解对应的残差误差在 10^{-14} 数量级。显然,这种级别的残差是由计算机截断误差造成的。

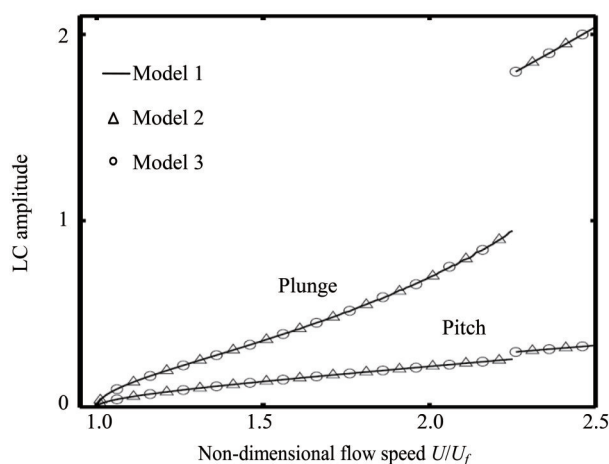


图3 考虑立方俯仰角刚度时RK法获得的不同模型的分岔图

Fig. 3 Bifurcation charts obtained by RK method as a cubic pitch stiffness is included

考虑在俯仰方向有立方非线性刚度,即 $G(\xi) = \xi$, $M(\alpha) = \alpha + \eta\alpha^3$,其中取 $\eta = 80$ 。当无量纲风速超过 U_f 时,气动弹性系统会产生极限环振荡,如图3所示。可以看到,三种模型获得的结果完全一致。而当 U/U_f 大约等于2.25时,系统出现了二次分岔现象。对于这种现象,Liu和Dowell在相关工作中进行了深入的研究^[6]。值得注意的是,三种模型的二次分岔结果也完全相同。此外,无论风速 U/U_f 在二次分岔临界值之前还是之后,三种模型的相图都是能够吻合的,如图4所示。

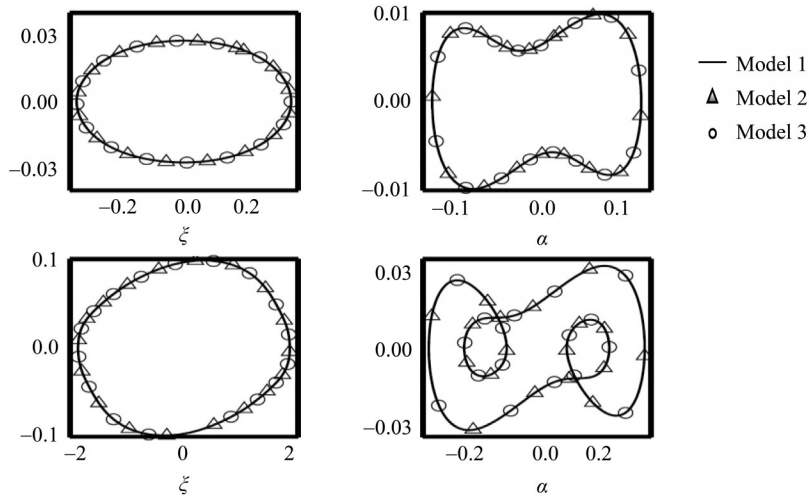


图4 考虑刚度立方非线性, 在二次分岔前后的相图对比

Fig. 4 Comparison of the phase planes before or after the secondary bifurcation as a cubic pitch stiffness is included

考虑如下所示的分段线性

$$M(\alpha) = \begin{cases} \alpha + \delta, & \alpha < -\delta, \\ 0, & -\delta \leq \alpha \leq \delta, \\ \alpha + \delta, & \delta < \alpha, \end{cases} \quad (22)$$

其中间隙参数设置为 $\delta=0.5^\circ$. 通过RK法得到的分岔如图5所示。可以看到在大多数情况下, 这三种模型的结果是相同的, 但仍存在一些细微的差异。例如, 当 $U/U_f = 0.31$ 时, 模型1与其他两个模型的结果不同。但从图6中可以看出, 模型1的解与模型2的解是对称的。对于模型2, 当 $U/U_f = 0.53$ 时, 以及模型3中 $U/U_f = 0.4$ 时也出现了类似的现象。

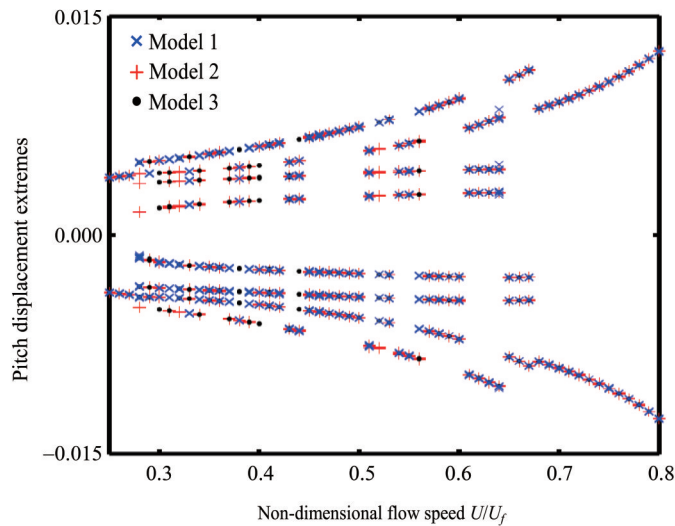


图5 在俯仰方向考虑分段线性, 由RK法得到的不同模型的分岔图

Fig. 5 Bifurcation charts obtained by RK as a piecewise stiffness is included

事实上, 这种现象是由分段线性系统在数值积分中, 分段线性转换点不准引起的。早在20世纪90年代, Conner等就阐述了这一数值现象^[24], 此现象可以通过预测-校正的精细积分法来解决^[23]。如图7所示, 通过精细积分法求解三种模型的数值解, 分岔图就完全相同了。总而言之, 对于含间隙非线性气动弹性系统, 这三种模型也是等价的。

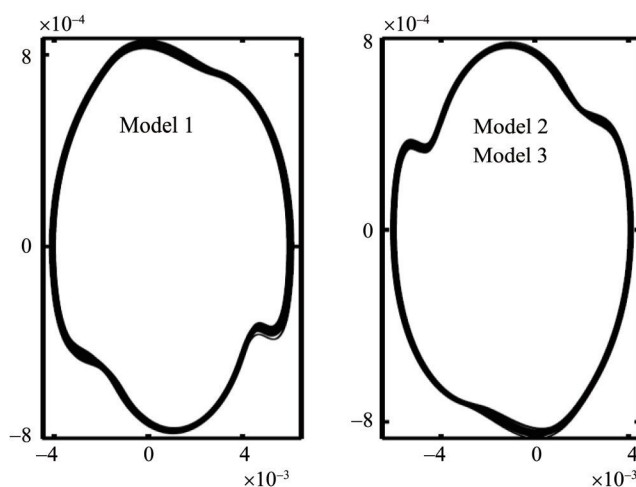


图6 考虑分段线性刚度, 由RK法得到的不同模型沉浮方向的相图

Fig. 6 Phase plane in the plunge direction provided by RK method as a piecewise stiffness is included

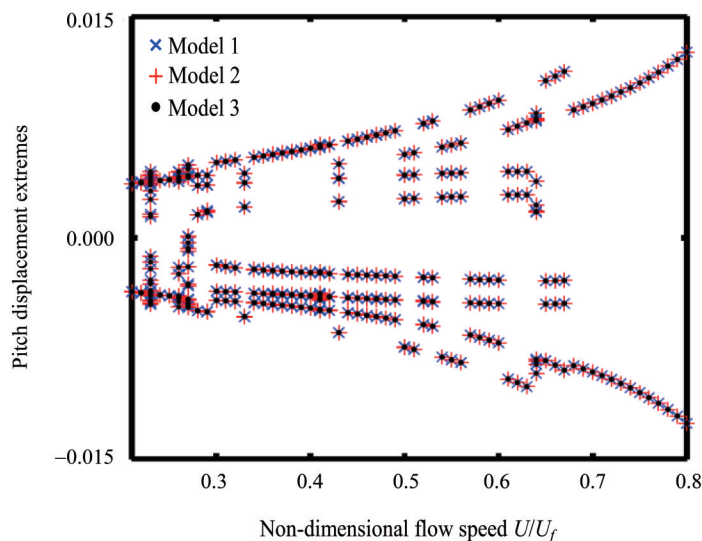


图7 考虑分段线性刚度时, 精细积分法得到的不同模型的分岔图

Fig. 7 Bifurcation charts provided by PIM as a piecewise stiffness is included

4 结 论

由于Thordorsen函数中存在卷积积分, 使得求解亚音速流作用下翼型气动弹性系统变得非常麻烦。其原因在于, 卷积积分会使气动弹性系统同时出现积分算子和微分算子, 这使得无法通过逐步积分法来直接求解。为了解决这一问题, 研究人员陆续提出了一些化简方法来处理方程中的积分项。在已有的研究中, 有三种广泛使用的状态空间化简模型。这些模型都可以成功处理系统中的积分项, 其中模型1将气动弹性系统表示为8个一阶常微分方程, 其他模型由6个常微分方程表示, 本文从数学上和通过数值模拟, 都证明了这三种状态空间模型在本质上是等价的。

此外, 数值结果表明由于分段非线性的存在, 这些模型在某些情况下通过RK法可能得到不同的数值结果。分析后发现, 这些差异是由于数值积分过程中, 气动弹性系统转换点不准确造成的。在本文中, 通过将RK法换成预估-校正的精细积分法, 精确地确定转换点, 从而解决了这个问题。并且三种模型得到完全相同的结果。

附录

参数 c_i 和 d_i :

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 + \frac{1}{\mu}, \quad c_1 = x_\alpha - \frac{a_h}{\mu}, \quad c_2 = \frac{2}{\mu} (1 - \psi_1 - \psi_2) + 2\zeta_\xi \frac{\bar{\omega}}{U^*}, \quad c_3 = \frac{1}{\mu} (1 + (1 - 2a_h)(1 - \psi_1 - \psi_2)), \\ c_4 &= \frac{2}{\mu} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \quad c_5 = \frac{2}{\mu} \left(1 - \psi_1 - \psi_2 + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2) \right), \quad c_6 = \frac{2}{\mu} \varepsilon_1 \psi_1 \left(1 - \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \right), \\ c_7 &= \frac{2}{\mu} \varepsilon_2 \psi_2 \left(1 - \varepsilon_2 \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \right), \quad c_8 = -\frac{2}{\mu} \varepsilon_1^2 \psi_1, \quad c_9 = -\frac{2}{\mu} \varepsilon_2^2 \psi_2, \quad c_{10} = \left(\frac{\bar{\omega}}{U^*} \right)^2, \\ d_0 &= \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} - \frac{a_h}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_1 = 1 + \frac{1 + 8a_h^2}{8\mu r_\alpha^2}, \quad d_2 = -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \\ d_3 &= \frac{1 - 2a_h}{2\mu r_\alpha^2} - \frac{(1 - 4a_h^2)(1 - \psi_1 - \psi_2)}{2\mu r_\alpha^2} + \frac{2\zeta_\alpha}{U^*}, \quad d_4 = -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (\varepsilon_1 \psi_1 + \varepsilon_2 \psi_2), \\ d_5 &= -\frac{1 + 2a_h}{2\mu r_\alpha^2} [2(1 - \psi_1 - \psi_2) + (1 - 2a_h)(\psi_1 \varepsilon_1 + \psi_2 \varepsilon_2)], \quad d_6 = -\frac{(1 + 2a_h)\psi_1 \varepsilon_1}{\mu r_\alpha^2} \left[1 - \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \right], \\ d_7 &= -\frac{(1 + 2a_h)\psi_2 \varepsilon_2}{\mu r_\alpha^2} \left[1 - \varepsilon_2 \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \right], \quad d_8 = \frac{(1 + 2a_h)\psi_1 \varepsilon_1^2}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_9 = \frac{(1 + 2a_h)\psi_2 \varepsilon_2^2}{\mu r_\alpha^2}, \quad d_{10} = \left(\frac{1}{U^*} \right)^2. \end{aligned}$$

式 (3) 中的矩阵和系数向量为

$$\begin{aligned} D_{12} &= -\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_6 & c_7 & c_8 & c_9 \\ d_6 & d_7 & d_8 & d_9 \end{pmatrix}, \quad D_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_{22} = -\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \\ V_1 &= \frac{2}{\mu} \left[(0.5 - a_h) \alpha(0) + \xi(0) \right] \phi_1 \varepsilon_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & M^{-1} (1 - (1 + 2a_h)/(2r_\alpha^2))^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ V_2 &= \frac{2}{\mu} \left[(0.5 - a_h) \alpha(0) + \xi(0) \right] \phi_2 \varepsilon_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & M^{-1} (1 - (1 + 2a_h)/(2r_\alpha^2))^T & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \\ r'_\xi &= (0 \ 0 \ M^{-1} (c_{10} \ 0)^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T, \quad r'_\alpha = (0 \ 0 \ M^{-1} (0 \ d_{10})^T \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T. \end{aligned}$$

式 (7) 中的矩阵为

$$\begin{aligned} A_{12} &= \frac{2}{\mu} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\phi_1 + \phi_2) & \varepsilon_1 \varepsilon_2 (\phi_1 + \phi_2) (0.5 + a_h) / r_\alpha^2 \\ 0 & 0 & (\varepsilon_1 \phi_1 + \varepsilon_2 \phi_2) & (\varepsilon_1 \phi_1 + \varepsilon_2 \phi_2) (0.5 + a_h) / r_\alpha^2 \end{pmatrix}^T, \\ A_{21} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0.5 - a_h \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon_1 \varepsilon_2 & -\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \\ \bar{r}'_\xi &= (0 \ 0 \ M^{-1} (c_{10} \ 0)^T \ 0 \ 0)^T, \quad \bar{r}'_\alpha = (0 \ 0 \ M^{-1} (0 \ d_{10})^T \ 0 \ 0)^T, \\ \bar{c}_5 &= \frac{2}{\mu} (1 - \psi_1 - \psi_2), \quad \bar{d}_5 = -\frac{1 + 2a_h}{\mu r_\alpha^2} (1 - \psi_1 - \psi_2). \end{aligned}$$

式 (9) 中的矩阵为

$$\begin{aligned} B_{12} &= \frac{2}{\mu} \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & (0.5 + a_h) / r_\alpha^2 \\ 0 & 0 & 1 & (0.5 + a_h) / r_\alpha^2 \end{pmatrix}^T, \quad B_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \phi_1 & \varepsilon_1 \phi_1 & \varepsilon_1 \phi_1 (0.5 - a_h) \\ 0 & \varepsilon_2 \phi_2 & \varepsilon_2 \phi_2 & \varepsilon_2 \phi_2 (0.5 - a_h) \end{pmatrix}, \\ B_{22} &= \begin{pmatrix} -\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & -\varepsilon_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] LEE B H K, PRICE S J, WONG Y S. Nonlinear aeroelastic analysis of airfoils: Bifurcation and chaos [J]. Progress in Aerospace Science, 1999, 35(3): 205-344.
 [2] 陈衍茂, 刘继科. 非线性颤振极限环稳定性判别的复数正规形法[J]. 航空动力学报, 2007, 22(4): 614-618.

- [3] 刘济科, 高磊. 机翼非线性颤振的分叉点研究[J]. 中山大学学报(自然科学版), 1998, 37(3): 29-32.
- [4] LEUNG A Y T, GUO Z J. Residue harmonic balance for two-degree-of-freedom airfoils with cubic structural nonlinearity [J]. AIAA Journal, 2011, 49(12): 2607-2611.
- [5] DAI H H, YUE X K, YUAN J P, et al. A time domain collocation method for studying the aeroelasticity of a two dimensional airfoil with a structural nonlinearity [J]. Journal of Computational Physics, 2014, 270: 214-237.
- [6] LIU L, DOWELL E H. The secondary bifurcation of an aeroelastic airfoil motion: Effect of high harmonics [J]. Nonlinear Dynamics, 2004, 37(1): 31-49.
- [7] 刘广, 刘济科, 陈衍茂. 基于 Wilson- θ 和 Newmark- β 法的非线性动力学方程改进算法[J]. 计算力学学报, 2017, 34(4): 433-439.
- [8] LIU G, WANG L, LUO W L, et al. Parameter identification of fractional order system using enhanced response sensitivity approach [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018, 67: 492-505.
- [9] LEE B H K, GONG L, WONG Y S. Analysis and computation of nonlinear dynamic response of a two-degree-of-freedom system and its application in aeroelasticity [J]. Journal of Fluids and Structures, 1997, 11(3): 225-246.
- [10] TRICKEY S T. Global and local dynamics of an aeroelastic system with a control surface freeplay nonlinearity [D]. North Carolina: Duke University, 2000.
- [11] COLLIER B D, CHAMARA P A. Structural non-linearities and the nature of the classic flutter instability [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 277(4/5): 711-739.
- [12] LIU G, LU Z R, WANG L, et al. A new semi-analytical technique for nonlinear systems based on response sensitivity analysis [J]. Nonlinear Dynamics, 2021, 103(2): 1529-1551.
- [13] CHUNG K W, HE Y B, LEE B H K. Bifurcation analysis of a two-degree-of-freedom aeroelastic system with hysteresis structural nonlinearity by a perturbation-incremental method [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 320(1/2): 163-183.
- [14] LIU G, WANG L, LIU J K, et al. Identification of an airfoil-store system with cubic nonlinearity via enhanced response sensitivity approach [J]. AIAA Journal, 2018, 56(11): 4977-4987.
- [15] LIU G, LV Z R, LIU J K, et al. Quasi-periodic aeroelastic response analysis of an airfoil with external store by incremental harmonic balance method [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2018, 100: 10-19.
- [16] TRICKEY S T, VIRGIN L N, DOWELL E H. The stability of limit-cycle oscillations in a nonlinear aeroelastic system [J]. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 2002, 458(2025): 2203-2226.
- [17] LI D, GUO S, XIANG J. Aeroelastic dynamic response and control of an airfoil section with control surface nonlinearities [J]. Journal of Sound and Vibration, 2010, 329(22): 4756-4771.
- [18] VASCONCELLOS R, ABDELKEFI A, MARQUES F D, et al. Representation and analysis of control surface freeplay nonlinearity [J]. Journal of Fluids and Structures, 2012, 31: 79-91.
- [19] CHAMARA P A, COLLIER B D. A study of double flutter [J]. Journal of Fluids and Structures, 2004, 19(7): 863-879.
- [20] 陈香, 杨志军, 范志强, 等. 超音速二元翼极限环颤振的高次线性化分析 [J]. 科学技术与工程, 2009, 9(1): 175-179.
- [21] ALIGHANBARI H, HASHEMI S M. Derivation of odes and bifurcation analysis of a two-DOF airfoil subjected to unsteady incompressible flow [J]. International Journal of Aerospace Engineering, 2009, 7: D248930.
- [22] DAI H, YUE X, XIE D, et al. Chaos and chaotic transients in an aeroelastic system [J]. Journal of Sound and Vibration, 2014, 333(26): 7267-7285.
- [23] CHEN Y M, LIU J K. Nonlinear aeroelastic analysis of an airfoil-store system with a freeplay by precise integration method [J]. Journal of Fluids and Structures, 2014, 46: 149-164.
- [24] CONNER M D, TANG D M, DOWELL E H, et al. Nonlinear behavior of a typical airfoil section with control surface freeplay: A numerical and experimental study [J]. Journal of Fluids and Structures, 1997, 11(1): 89-109.

(责任编辑 王海蓉)